



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

## Acesso ao Ensino Superior dos Maiores de 23

### Prova Específica de Matemática Aplicada às Ciências

### Sociais e Humanas (MACS)

2023

Nome: \_\_\_\_\_

Cotação

Grupo I

**Instruções:**

-----

Grupo II

1. Preencha corretamente o seu nome.

-----

Grupo III

2. O único material permitido é o de escrita e calculadora.

-----

3. A prova tem duração de 120 minutos.

Total:

4. Justifique convenientemente as suas respostas. Em particular, apresente na folha de teste todas as fórmulas que utilizar e todos os cálculos que efetuar.

Nome: \_\_\_\_\_

Cotações

Grupo I

Grupo I

1. O Ricardo, o José e o Paulo compraram, em conjunto, um certo número de rifas. Do dinheiro despendido na compra, o Ricardo participou com 40%, e o José e o Paulo participaram com 30% cada um.

1.

2.

Um dos bilhetes que compraram permitiu-lhes receber um prémio constituído por três bens: uma máquina fotográfica, um televisor e uma consola de jogos.

Subtotal

Os três jovens vão fazer a partilha do prémio, e o método utilizado é o seguinte.

- Primeira etapa: cada jovem atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todos os jovens.
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada jovem, ao prémio. Em seguida, determina-se o valor que cada jovem considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada jovem, através de uma proporção direta entre a percentagem de participação de cada jovem na compra das rifas e a soma das licitações atribuídas por esse jovem.
- Terceira etapa: cada bem é atribuído ao jovem que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um jovem não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o <<valor dos bens recebidos>> por esse jovem é zero.
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por um jovem for superior ou inferior à porção justa por si determinada, então esse jovem terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo ao total do valor a pagar o total do valor que os jovens têm a receber. Este excesso é distribuído na proporção direta da participação de cada jovem na compra das rifas.

Na tabela seguinte, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada jovem a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa.

	Ricardo	José	Paulo
Máquina fotográfica	140€	120€	180€
Televisor	800€	700€	600€
Consola de jogos	580€	700€	500€

De acordo com o método acima descrito, determine como serão distribuídos os bens pelos amigos e o valor monetário a pagar ou a receber, de forma que nenhum deles tenha razão para reclamar.



2. Na escola de Vinhas, os métodos eleitorais são aplicados na seleção das atividades da escola. Os alunos da escola de Vinhas têm de escolher o tema dos trabalhos da semana cultural. Os alunos podem escolher os temas seguintes: Desporto, Solidariedade ou Festas. Cada aluno deve ordenar, uma única vez, os três temas de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados 985 votos válidos. Na tabela seguinte, encontram-se organizados os resultados obtidos.

	415 votos	370 votos	200 votos
<b>1ª Preferência</b>	Desporto	Solidariedade	Festas
<b>2ª Preferência</b>	Solidariedade	Festas	Desporto
<b>3ª Preferência</b>	Festas	Desporto	Solidariedade

A escolha do tema dos trabalhos da semana cultural é feita usando o método seguinte.

- Para que um voto possa ser considerado válido, cada aluno ordena, uma única vez, os temas de acordo com as suas preferências.
- Na ordenação final dos temas, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os temas em votação.
- Cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto.
- É escolhido o tema com maior número de pontos.

Antes de anunciar o tema escolhido, a diretora da escola excluiu o tema Festas, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências (tabela anterior). Verifique se o tema escolhido se mantém, aplicando o método de escolha acima descrito aos dois casos:

- incluindo o tema Festas;
- excluindo o tema Festas.



Nome: \_\_\_\_\_

Grupo II

Cotações

**3.** As altitudes de dois pequenos aviões foram monitorizadas, pela torre de controlo do aeródromo da ilha de *Sun*, pouco tempo depois de levantarem voo.

Admita que as altitudes, em milhares de metros,  $t$  minutos após o início da monitorização, do avião da companhia aérea *AAir* ( $A$ ) e do avião da companhia aérea *BAir* ( $B$ ) são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = \frac{9}{1+17e^{-0,7t}} \quad \text{e} \quad B(t) = \frac{8}{1+31e^{-t}} \quad \text{para } t \in [0, 15]$$

Grupo II

3.1.

3.2.

3.3.

-----  
Subtotal

**3.1.** Suponha que o modelo que dá, em cada momento, a altitude do avião da companhia *AAir* tem uma margem de erro de 10 metros.

Determine entre que valores pode variar a altitude efetiva deste avião, 90 segundos após o início da monitorização.

Apresente a resposta, em metros, com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

**3.2.** O avião da companhia *AAir* não atingiu a altitude prevista no plano de voo inicialmente estabelecido. Nesse plano de voo, o avião deveria atingir a altitude máxima de 12 000 metros.

Selecione a opção que completa corretamente a frase.

“Ao fim dos 15 minutos de voo monitorizado, a altitude atingida pelo avião da *AAir* foi, com aproximação às unidades, \_\_\_\_\_ da altitude máxima estabelecida no plano de voo.”

(A) 22%      (B) 44%      (C) 67%      (D) 75%

**3.3.** Determine, de acordo com os modelos apresentados, quantos minutos o avião da companhia *AAir* voou a uma altitude inferior à do avião da companhia *BAir*, durante os 15 minutos de voo monitorizado.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às décimas.

Nome: \_\_\_\_\_

Cotações

Grupo III

Grupo III

4. Na escola do Mário, o professor de MACS resolveu questionar os alunos de duas turmas distintas sobre o número de mensagens que cada aluno recebeu, num sábado, no telemóvel. Os resultados obtidos encontram-se representados num diagrama de barras, os da Turma A, e numa tabela, os da Turma B.

4.1.1.

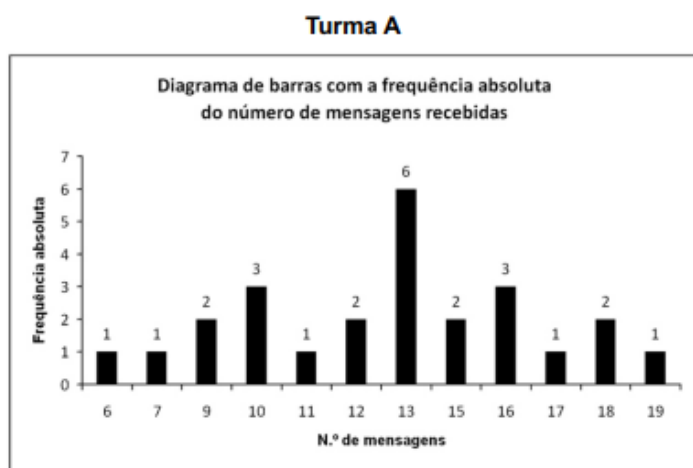
4.1.2.

4.2.

4.3.

5.

-----  
Subtotal



**Turma B**

N.º de mensagens recebidas	N.º de alunos
10	1
11	2
12	4
13	12
14	3
15	2
16	1

4.1. Considere os dados referentes à **Turma B** para responder às questões seguintes:

4.1.1. Determine as frequências relativas simples e as frequências relativas acumuladas do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, nesse sábado.

Apresente as frequências com duas casas decimais.



- 4.1.2.** Represente, num diagrama de barras, os dados relativos às frequências absolutas.

**4.2.** Num trabalho para a disciplina de MACS, depois de ter calculado a média e o desvio padrão do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, para cada uma das turmas, o Mário comentou:

«A média do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A e a média do número de mensagens recebidas pelos da turma B são iguais, mas o mesmo não acontece com os desvios padrão.»

O António, aluno da turma do Mário, com quem ele estava a tratar os dados, comentou: «Quando me disseste que as médias eram iguais, eu, observando as representações gráficas, concluí logo que os desvios padrão eram diferentes.»

Num pequeno texto, apresente as médias e os desvios padrão obtidos e justifique o raciocínio do António.

No seu texto deve:

- indicar o valor da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas, do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A;
- indicar o valor da média e o do desvio padrão do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma B;
- incluir a justificação do raciocínio do António.

**4.3.** A partir de uma amostra aleatória de mensagens recebidas no telemóvel pelos alunos da escola do Mário, concluiu-se que, em 250 mensagens, 125 tinham uma extensão de 30 caracteres.

Construa um intervalo com uma confiança de 95% para estimar a proporção de mensagens com a extensão de 30 caracteres recebidas no telemóvel pelos alunos da escola do Mário.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às centésimas.

5. Um armazenista recebe de duas fábricas, *Alfa* e *Beta*, televisores de uma determinada marca, em igual proporção. Na fábrica *Alfa*, um terço da produção destina-se ao mercado nacional, e a restante é exportada para África. Na fábrica *Beta*, um quarto da produção destina-se ao mercado nacional, metade é exportada para o Brasil, e a restante é exportada para África.

O armazenista escolhe, aleatoriamente, um dos televisores.

Calcule a probabilidade de o televisor escolhido ser produzido pela fábrica *Alfa*, sabendo que ele se destina ao mercado nacional.

## Formulário:

### Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left[ \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
$n$ – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral $\sigma$ – desvio padrão da variável $z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left[ \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
$n$ – dimensão da amostra $\bar{x}$ – média amostral $s$ – desvio padrão amostral $z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

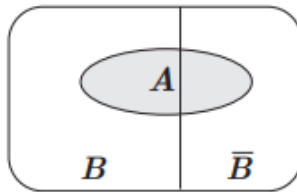
$\left[ \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$
$n$ – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral $z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576

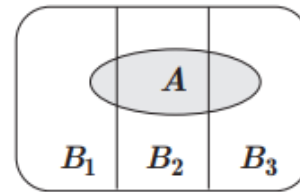
## Probabilidades

### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3.