



UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Acesso ao Ensino Superior dos Maiores de 23

Prova Específica de Matemática A

2023

Cotação

Grupo I

Grupo II

Total:

Nome : _____

Instruções :

1. Preencha corretamente o seu nome.
2. O único material permitido é o de escrita e calculadora.
3. O teste tem duração de 120 minutos.
4. As perguntas de escolha múltipla têm quatro respostas alternativas, das quais apenas uma está correta. Se assinalar mais do que uma resposta a questão terá cotação zero.
5. Excepto nas perguntas de escolha múltipla, justifique convenientemente as suas respostas. Em particular, apresente na folha de teste todas as fórmulas que utilizar e todos os cálculos que efetuar.

Grupo I

Grupo I

1. Na figura abaixo, encontra-se um tabuleiro quadrado dividido em 25 quadrados iguais. A Maria tem 15 marcas, 11 vermelhas e 4 brancas que só se distinguem pela cor, para colocar no tabuleiro, não mais do que uma em cada quadrado.

1	2	3	4	5	
					A
					B
					C
					D
					E

1.

2.

3.

4.

5.

6.a)

6.b)

Subtotal:

De quantas maneiras diferentes pode a Maria colocar as 15 marcas no tabuleiro?

- (a) ${}^{25}A_{15}$ (b) ${}^{25}C_{11} \times {}^{14}C_4$ (c) ${}^{25}A_{11} \times {}^{14}A_4$ (d) ${}^{25}C_{15}$

2. Considere um espaço de resultados finito, Ω , associado a uma certa experiência aleatória. A propósito de dois acontecimentos X e Y , tais que $X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega$, sabe-se que:

$P(X) = 0,30$, $P(Y) = 0,15$ e que X e Y são independentes.

A probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a:

- (a) 0,595 (b) 0,55 (c) 1 (d) 1,55

3. Seja $a \in \mathbb{R}$. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	-1	0	1
$P(X = x_i)$	a	$2a$	$0,2 + 2a$

Sabendo que $P(X = -1 \vee X = 0) = 0,48$, a média desta variável aleatória é:

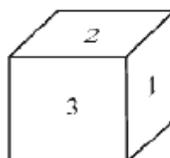
- (a) 0,16 (b) 0,84 (c) 0 (d) 0,36

4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias que representam a humidade relativa do ar (em %) registada, durante o mês de Julho, pelas estações meteorológicas existentes, respetivamente, nas cidades A e B.

De acordo com os dados recolhidos, sabe-se que $X \sim N(58; 8)$ e $Y \sim N(82; 8)$. Diga qual das seguintes afirmações está correta:

- (a) $P(X > 56) < P(Y < 84)$ (b) $P(X > 56) > P(Y < 84)$
- (c) $P(X < 56) < P(Y > 84)$ (d) $P(X > 56) = P(Y < 84)$

5. Na figura seguinte, encontra-se um dado com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número.



Lança-se o dado uma única vez e observa-se qual o número da face voltada para cima. Considere os acontecimentos:

A : "sair um número ímpar"

B : "sair um número maior do que 1"

Sabe-se que: $P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$ e $P(B|A) = \frac{2}{7}$.

A probabilidade de sair o número 1 é:

(a) $\frac{7}{9}$

(b) $\frac{5}{9}$

(c) $\frac{4}{9}$

(d) $\frac{2}{9}$

6. Em Lisboa, foram realizados estudos com o objectivo de determinar a concentração de monóxido de carbono (CO), em partes por milhão (*p.p.m.*), perto de vias rápidas.
- (a) Esses estudos revelaram que o nível de concentração de CO perto das vias rápidas segue uma distribuição normal, com média 110 *ppm* e desvio padrão 10 *ppm*. Por outro lado, o estudo refere que o nível de concentração deste poluente não deve exceder o valor de equilíbrio aceitável de 90 *ppm*. Calcule a probabilidade de, num certo dia em Lisboa, o nível de concentração de CO perto de vias rápidas exceder esse valor.

- (b) Considere agora que se escolheram, ao acaso, os dados relativos à concentração de CO perto de vias rápidas correspondentes a quinze dias.

Determine a probabilidade de, no mínimo, em 3 desses dias o nível de concentração de CO perto das vias rápidas exceder o valor de equilíbrio aceitável.

Nota: caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere que a probabilidade de, num certo dia, o nível de concentração de CO perto de vias rápidas exceder o valor de equilíbrio aceitável é 0,9973.

Grupo II

Grupo II

1. Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \log_4(16\sqrt[3]{x})$.

Indique qual das expressões seguintes é igual a $f(x)$:

$16 \log_4 x$
 $2 \log_4 \sqrt[3]{x}$
 $\frac{6 + \log_4 x}{3}$
 $\frac{2 + \log_4 x}{3}$

2. Seja $S = \{x \in \mathbb{R} : \ln(e^{-x} - e) \leq 0\}$. Então :

$S =]-\ln(1+e), -1[$
 $S = [-\ln(1+e), -1[$

$S =]-\infty, -\ln(1+e)]$
 $S = [-\ln(1+e), +\infty[$

3. Considere a sucessão u_n definida por $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = 0$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

$1 - \ln x$
 $1 + \ln x$
 $x - \ln x$
 $x + \ln x$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ -x + \ln x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua no seu domínio. Qual é o valor de k ?

e
 1
 0
 -1

5. Seja f a função definida em \mathbb{R} por $f(x) = x^5 - x + 1$. O Teorema de Bolzano permite concluir que a equação $f(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

$] -1, 0[$
 $] 0, 1[$
 $] 1, 2[$
 $] 2, 3[$

6. Seja f uma função definida em \mathbb{R} . Sabe-se que :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Em qual das opções seguintes as duas expressões definem assíntotas do gráfico da função f ?

$x = 1$ e $y = -2x + 1$
 $x = 1$ e $y = 2x + 1$

$y = 3$ e $y = -2x + 1$
 $y = 2$ e $y = 2x + 1$

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.a)

7.b)

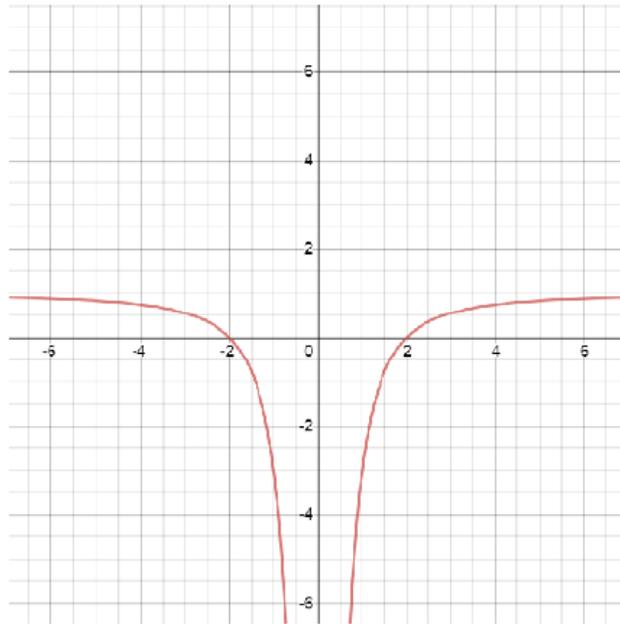
7.c)

8.a)

8.b)

Subtotal:

7. Considere a figura seguinte onde está representado o gráfico da derivada de uma certa função f , isto é, o gráfico de f' .



Sabemos que :

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $f'(-2) = f'(2) = 0$;
- f' não tem extremos relativos.

Indique, **justificando convenientemente as suas respostas** :

(a) o subconjunto de \mathbb{R} onde a função f é contínua ;

(b) os intervalos de monotonia e os extremos relativos, caso existam, da função f ;

(c) o sentido das concavidades e os pontos de inflexão, caso existam, do gráfico de f .

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos de \mathbb{R} e verificando:

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- $f(1) = f'(1) = e$.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \frac{\ln[f(x)]}{x^2 + 1}$.

(a) Calcule $h'(1)$.

(b) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 1.